## MATEMATIKA K PŘIJÍMACÍM ZKOUŠKÁM NA VŠE: PÍSEMNÁ PRÁCE -VZOR

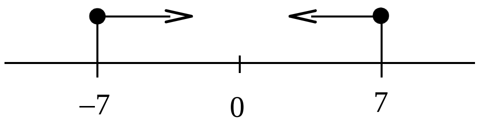
*1. Určete maximální definiční obor reálné funkce f jedné reálné proměnné definované předpisem* $f(x)=\dfrac{\sqrt{49-x^2}}{\log(x-4)}$.

**ŘEŠENÍ:**

a)

$$49-x^2\ge 0 \Rightarrow x^2\le 49$$

$$|x|\le 7$$




$$x\in\langle -7;7\rangle$$

b)

$$x-4>0$$

$$x>4$$

c)

$$\log(x-4)\ne 0$$

$$x-4\ne 1$$

$$x\ne 5$$

Výsledkem je průnik všech podmínek!

$$\underline{\underline{D(f)=(4;5)\cup(5;7\rangle}}$$

Definiční obor funkce

1. podmínka vychází z definičního oboru odmocniny.
Pozor! Odmocníme-li druhou mocninu $x^2$, dostaneme absolutní hodnotu $|x|$.
Nerovnici s 1 absolutní hodnotou, řešíme z jejího geometrického významu: vzdálenost od nuly je menší nebo rovna sedmi!
2. podmínka vychází z definičního oboru logaritmické funkce.
3. podmínka vychází z nemožnosti dělení nulou.

*2. Vypočtěte všechna reálná řešení rovnice* $\cos(2x)-\sin(4x)=0$ .

**ŘEŠENÍ:**

Substituce: $2x=y$

$$\cos y-\sin 2y=0$$

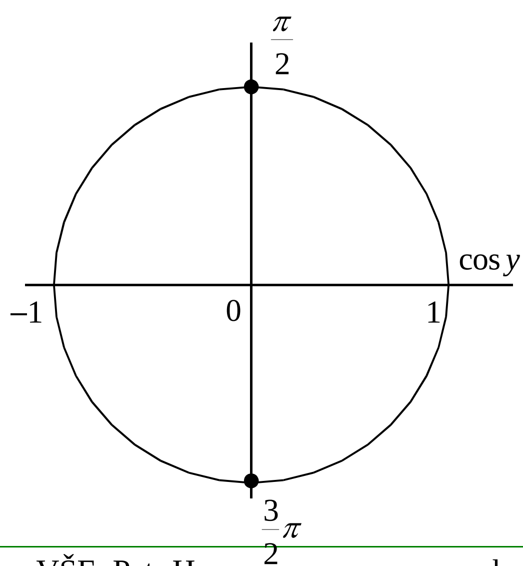
$$\cos y-2\sin y\cos y=0$$

$$\cos y(1-2\sin y)=0$$

a) $\cos y=0 \Rightarrow y_{1k}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

$$2x_{1k}=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$x_{1k}=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$$




Goniometrická rovnice

Pomůžeme si vhodnou substitucí. Měli bychom vědět, jak „šikovně“ se bude pracovat s goniometrickou fcí dvojnásobného argumentu sin $2y$ !

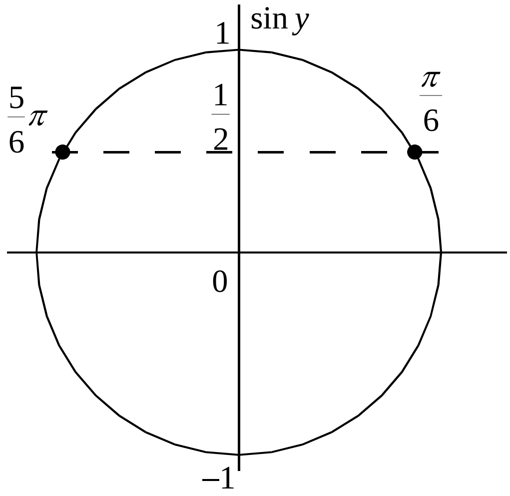
Využijeme výhodný „součinový tvar s nulou na pravé straně“. Je-li součin 2 činitelů nula, je nulový jeden nebo druhý činitel.

b) $\sin y = \dfrac{1}{2}$

$$y_{2k} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x_{2k} = \frac{\pi}{12} + k\pi$$

$$y_{3k} = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \Rightarrow x_{3k} = \frac{5}{12}\pi + k\pi$$

$$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; \frac{5}{12}\pi + k\pi \right\}$$




Nezapomeneme na „návrat ze substituce“.

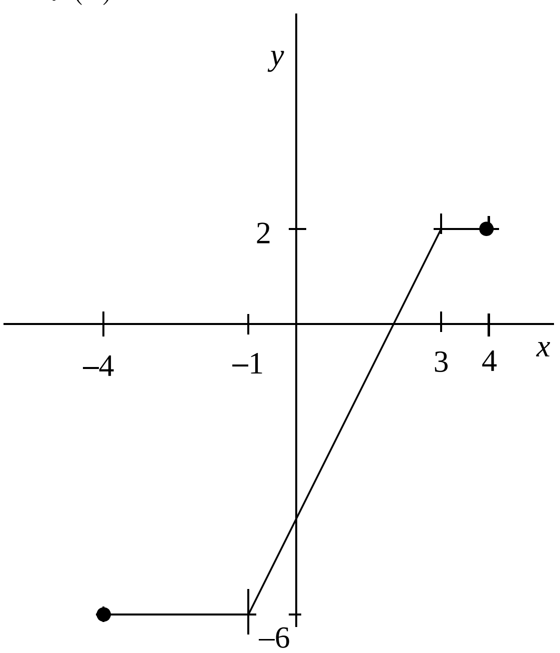
## 3. Na intervalu $\langle -4, 4 \rangle$ uvažujeme reálnou funkci jedné reálné proměnné definovanou předpisem $f(x) = |x+1| - |3-x| - 2$.

a) Nakreslete graf této funkce,
b) vypočtěte průsečíky grafu vyšetřované funkce s osou x (pokud existují),
c) vypočtěte průsečík grafu vyšetřované funkce s osou y (pokud existuje).

**ŘEŠENÍ:**

a) Nulové body: $x_{01} = -1, x_{02} = 3$

$$f(-4) = 3 - 7 - 2 = -6$$
$$f(-1) = 0 - 4 - 2 = -6$$
$$f(3) = 4 - 0 - 2 = 2$$
$$f(4) = 5 - 1 - 2 = 2$$




b) $y = 0$

Graf funkce
Jednoduchá metoda:
Určíme funkční hodnoty v krajních bodech zadaného intervalu a v „nulových bodech“ jednotlivých absolutních hodnot.
To jsou body „zlomu“ lineárních částí.

Podmínka pro průsečík s osou $x$ je: $y = 0$

$$|x+1|-|3-x|-2=0$$

$$x\in(-1;3)$$

$$x+1-3+x-2=0$$

$$2x=4$$

$$x=2 \quad \Rightarrow P_x[2;0]$$

c) $x = 0$

$$f(0)=1-3-2=-4 \quad \Rightarrow \quad P_y=[0;-4]$$

Podmínka pro průsečík s osou $x$ je: $x = 0$

Jiný způsob konstrukce grafu:

Komplikovanější hledání grafu funkce. Interval rozdělíme na 3 a na každém hledáme správnou podobu rovnice lineární funkce po odstranění absolutních hodnot.

| | | $-1$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert x+1\rvert$ | $-$ | | $+$ | | $+$ |
| $\lvert 3-x\rvert$ | $+$ | | $+$ | | $-$ |

$$\underline{x\in\langle-4;-1)} \Rightarrow f(x)=-x-1-3+x-2$$

$$f(x)=-6$$

$$\underline{x\in\langle-1;3\rangle} \Rightarrow f(x)=x+1-3+x-2$$

$$f(x)=2x-4$$

$$\underline{x\in(3;4\rangle} \Rightarrow f(x)=x+1+3-x-2$$

$$f(x)=2$$

## 4. Určete množinu všech reálných x, pro která platí $7^{x+2}-6\cdot 7^x \geq 43$.

**ŘEŠENÍ:**

$$7^2\cdot 7^x-6\cdot 7^x\geq 43$$

$$49y-6y\geq 43$$

$$43y\geq 43$$

$$y\geq 1$$

$$7^x\geq 7^0$$

$$x\geq 0$$

$$\underline{\underline{P=\langle 0;\infty)}}$$

Exponenciální nerovnost

Použijme vzorec:

$a^{s+t}=a^s\cdot a^t$

Zavedeme šikovnou substituci:

$y=7^x$

Pozor! Je to nerovnice $\Rightarrow$ výsledek bude interval.

5. *Napište obecnou i parametrickou rovnici přímky, která prochází bodem* $A=[5,-9]$ *a je rovnoběžná s přímkou procházející body* $B=[-2,3]$ *a* $C=[2,5]$.

**ŘEŠENÍ:**

$q' = BC$

$\overrightarrow{u_q}^* = C - B = (4;2) \Rightarrow \overrightarrow{u_q} = (2;1)$

$p: \overrightarrow{u_p} = (2;1),\ A[5;-9] \in p$

Rovnice přímky

Určíme směrový vektor přímky *BC*. Hledaná přímka je s ní rovnoběžná, musí mít shodný směrový vektor.

Parametricky:

$p: x = 5 + 2t$

$y = -9 + t;\ t \in R$

Pomocí bodu a vektoru zapíšeme parametrické vyjádření přímky.

Obecná rovnice:

$\overrightarrow{u_p} = (2;1) \Rightarrow \overrightarrow{n_q} = (1;-2)$

$p: x - 2y + c = 0$

$A \in p \Rightarrow 5 + 18 + c = 0$

$c = -23$

$\underline{\underline{p: x - 2y - 23 = 0}}$

K určení obecné rovnice potřebujeme normálový vektor. Získáme ho ze směrového. Zaměníme souřadnice a u jedné změníme znaménko. Souřadnice normálového vektoru dosadíme za *a* a *b* do obecné rovnice a po dosazení souřadnic bodu *A* za *x* a *y* dopočítáme *c*.

*Strategie pro psaní písemek z matematiky:*

1) **Nejdříve řeším ty příklady, u kterých jsem si jist, že znám správný postup řešení**
2) **Hlídám si neustále čas**
3) **Vše po sobě kontroluji**
4) **Zbytečně neškrtám**
5) **Vždy počítám přehledně, pečlivě a pozorně a soustředěně**